

OVER DE CONVERGENTIE VAN EEN ITERATIEPROCES
VOOR BILINEAIRE VERGELIJKINGEN.

M.L. Potters.

Rapport MR 9

van de

Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam. ..

1 9 5 2 .

Over de convergentie van een iteratieproces
voor bilineaire vergelijkingen.

1. Op te lossen zij het stelsel bilineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} p_1 q_1 + a_{12} p_1 q_2 + \dots + a_{1m} p_1 q_m = b_1 & & & & & & \\ + & + & & + & & + & \\ a_{21} p_2 q_1 + a_{22} p_2 q_2 + \dots + a_{2m} p_2 q_m = b_2 & & & & & & \\ + & + & & + & & + & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ + & + & & + & & + & \\ a_{m1} p_m q_1 + a_{m2} p_m q_2 + \dots + a_{mm} p_m q_m = b_m & & & & & & \\ \parallel & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ c_1 & c_2 & & \dots & & c_m & \end{array} \quad (1,1)$$

waarbij geldt $\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m b_i$, terwijl alle a_{ij} , b_i , c_i reeel zijn.

Deze 2 m vergelijkingen met 2 m onbekenden p_i en q_i ($i = 1 \dots m$) zijn niet onafhankelijk; de oplossing bevat een willekeurige constante. Is $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ een oplossing van (1,1), dan voldoet ook $a p_i^{(0)}$, $a^{-1} q_i^{(0)}$.

De volgende iteratiemethode wordt toegepast:

Zij voor de p_i verkregen de benadering $p_i(n)$ ($i = 1 \dots m$), dan wordt een benadering voor de q_i berekend volgens

$$q_i(n+1) = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^m a_{ji} p_j(n)} \quad (1,2a)$$

Hieruit volgt dan weer een nieuw stel p_i :

$$p_i(n+2) = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^m a_{ij} q_j(n+1)}. \quad (1,2b)$$

Elke berekening van een stel p_i of een stel q_i wordt dus als een iteratiestap beschouwd. De beginschatting $p_i(0)$ zij de nulde stap. Hiervan uitgaande worden derhalve de $p_i(n)$ met even n en de $q_i(n)$ met oneven n berekend.

2. Voor het geval $m = 2$ kan het stelsel (1,1) exact opgelost worden, terwijl anderzijds eenvoudige convergentievoorwaarden van de methode (1,2) voor dit geval kunnen opgesteld worden. In het volgende zij daarom de beperking tot $m = 2$ gemaakt. Het stelsel (1,1) wordt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} p_1 q_1 + a_{12} p_1 q_2 = b_1 & & & & & & \\ + & + & & + & & + & \\ a_{21} p_2 q_1 + a_{22} p_2 q_2 = b_2 & & & & & & \\ \parallel & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ c_1 & c_2 & & c_1 & & c_2 & \end{array} \quad (2,1)$$

Een der vier onbekenden p_1, p_2, q_1, q_2 kan als parameter beschouwd worden en een der vier vergelijkingen weggelaten. Om de hierdoor ontstane asymmetrie te ontgaan, kunnen als volgt nieuwe coëfficiënten en onbekenden worden ingevoerd:

$$\begin{aligned} S &= \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{c_1 + c_2}{2} & b_1 &= S + V \\ V &= \frac{b_1 - b_2}{2} & b_2 &= S - V \\ W &= \frac{c_1 - c_2}{2} & c_1 &= S + W \\ & & c_2 &= S - W \end{aligned} \quad \text{waaruit volgt} \quad (2,2a)$$

$$\begin{aligned} z &= p_1 q_1 & q_1 &= \frac{z}{p_1} \\ x &= \frac{p_2}{p_1} & q_2 &= \frac{yz}{p_1} \\ y &= \frac{q_2}{q_1} & p_2 &= x p_1 \end{aligned} \quad \text{waaruit volgt} \quad (2,2b)$$

De vergelijkingen (2,1) gaan hiermee over in

$$\begin{aligned} a_{11} z + a_{12} yz &= S + V \\ + &+ \\ a_{21} xz + a_{22} xyz &= S - V \\ \parallel &\parallel \\ S + W &S - W \end{aligned} \quad (2,3)$$

Dit stelsel heeft twee oplossingen

$$x = \frac{(WD - VP) + R}{2a_{21}a_{22}(S+V)} \quad (2,4a)$$

$$y = \frac{(VD - WP) + R}{2a_{12}a_{22}(S+W)} \quad (2,4b)$$

$$z = \frac{2a_{22}(S+V)(S+W)}{(S+W+V)D + SP + R} \quad (2,4c)$$

$$\text{Hierin is } D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$P = a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}$$

$$R^2 = (V^2 + W^2 - S^2)D^2 - 2VWPD + S^2P^2.$$

Men kan het teken van R kiezen en verkrijgt dus twee oplossingen (2,4). Voor het reeel zijn van p_1, p_2, q_1, q_2 is nodig en voldoende dat x, y en z reeel zijn. De voorwaarde hiertoe is

$$R^2 \geq 0 \quad (2,5)$$

3. Het iteratieproces (1,2) toegepast op het stelsel (2,1) levert

$$q_1(n+1) = \frac{c_1}{a_{11}p_1(n) + a_{21}p_2(n)} \quad (3,1a)$$

$$q_2(n+1) = \frac{c_2}{a_{12}p_1(n) + a_{22}p_2(n)} \quad (3,1b)$$

$$p_1(n+2) = \frac{b_1}{\frac{a_{11}c_1}{a_{11}p_1(n) + a_{21}p_2(n)} + \frac{a_{12}c_2}{a_{12}p_1(n) + a_{22}p_2(n)}} \quad (3,2a)$$

$$p_2(n+2) = \frac{b_2}{\frac{a_{21}c_1}{a_{11}p_1(n) + a_{21}p_2(n)} + \frac{a_{22}c_2}{a_{12}p_1(n) + a_{22}p_2(n)}} \quad (3,2b)$$

Onder invoering van $x(n) = \frac{p_2(n)}{p_1(n)}$ gaat (3,2) over in

$$x(n+2) = \frac{t_1 + t_2 x(n)}{n_1 + n_2 x(n)} \quad (3,3)$$

waarin

$$\begin{aligned} t_1 &= b_2(c_1 + c_2)a_{11} a_{12} \\ t_2 &= b_2(c_1 a_{11} a_{22} + c_2 a_{12} a_{21}) \\ n_1 &= b_1(c_1 a_{12} a_{21} + c_2 a_{11} a_{22}) \\ n_2 &= b_1(c_1 + c_2) a_{21} a_{22} \end{aligned} \quad (3,4)$$

(3,3) is een differentievergelijking voor $x(n)$. Een dergelijke geldt ook voor $y(n) = \frac{q_2(n)}{q_1(n)}$.

Uit (3,2) kan ook een differentievergelijking voor $p_1(n)$ verkregen worden, waarin echter $x(n)$ nog voorkomt:

$$\frac{p_1(n+2)}{p_1(n)} = \frac{b_1 t_1 + (b_1 t_2 + b_2 n_1)x(n) + b_2 n_2 x^2(n)}{(b_1 + b_2) \{ t_1 + t_2 x(n) \}} \quad (3,5)$$

Als randvoorwaarden komen bij (3,3) en (3,4) nog de beginschattingen voor $x(0)$ en $p_1(0)$. Een oplossing voor (3,3) kon gevonden worden.

4. De functie $f(n)$ zij als volgt gedefinieerd:

$$\frac{f(n)}{f(0)} = \frac{AN+C}{BN+C} \quad (4,1)$$

met $N = th kn$, terwijl $A, B, C, f(0)$ en k constanten zijn.

Schrijft men $K = \text{th } 2k$, dan geldt

$$\text{th } k(n+2) = \frac{N+K}{1+NK}$$

$$\text{Hieruit volgt } \frac{f(n+2)}{f(0)} = \frac{A(N+K)+C(1+NK)}{B(N+K)+C(1+NK)} \quad (4,2)$$

Eliminatie van N uit (4,1) en (4,2) levert een differentievergelijking voor $f(n)$:

$$\frac{f(n+2)}{f(0)} = \frac{K(A^2-C^2) f(0) + \{C(A-B)-K(AB-C^2)\} f(n)}{\{C(A-B)+K(AB-C^2)\} f(0) - K(B^2-C^2) f(n)} \quad (4,3)$$

Nu zijn de vergelijkingen (3,3) en (4,3) dezelfde, als tussen haar coëfficiënten t_1, t_2, n_1, n_2 resp. A, B, C, K de volgende relaties bestaan:

$$K^2 = 1 - 4 \frac{n_1 t_2 - t_1 n_2}{(n_1 + t_2)^2} \quad (4,4a)$$

$$A = \frac{1}{K} \left\{ \frac{t_1}{f(0)} - \frac{n_1 - t_2}{2} \right\} \quad (4,4b)$$

$$B = \frac{1}{K} \left\{ \frac{n_1 - t_2}{2} + n_2 f(0) \right\} \quad (4,4c)$$

$$C = \frac{n_1 + t_2}{2} \quad (4,4d)$$

$$f(0) = x(0) \quad (4,4e)$$

De vergelijking (3,3) wordt dus opgelost door

$$x(n) = \frac{AN+C}{BN+C} \cdot x(0) \quad (4,5)$$

De coëfficiënten hierin zijn door (4,4) op het teken van K na bepaald. Het teken van K is echter voor $x(n)$ irrelevant; zij $K \geq 0$ gekozen. Door (4,5) is $x(n)$ nu bepaald als functie van $N = \text{th}(\frac{n}{2} \text{ arc th } K)$.

Bij gegeven K is N weliswaar niet voor alle n eenduidig bepaald als functie van n , maar juist wel voor de even waarden van n .

5. Wat de convergentie van het iteratieproces aangaat, kan allereerst opgemerkt worden, dat $x(n)$ in het algemeen een pool zal hebben, en wel voor $n_p = \frac{1}{K} \text{ arc th } -\frac{C}{B}$.

Het geval echter, dat n_p even is, kan uitgesloten worden door $x(0)$ en daarmee B en C geschikt te kiezen.

De convergentie van $x(n)$ hangt dus slechts af van het asymptotisch gedrag van N , waarvoor de parameter K , die volgens (4,4a) en (3,4) uit de coëfficiënten der vergelijkingen volgt, beslissend is.

Er zijn zes gevallen te onderscheiden, waarvan hieronder een overzicht volgt:

	K^2	$N(\text{voor even } n)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} N$
1)	< 0	$i \operatorname{tg} \left(\frac{n}{2} \operatorname{arctg} \frac{K}{I} \right)$	geen
2)	$= 0$	0	geen
3)	$\begin{matrix} > 0 \\ \text{en} < 1 \end{matrix}$	$\operatorname{th} \left(\frac{n}{2} \operatorname{ar} \operatorname{th} K \right)$	1
4)	$= 1$	$\frac{ n }{n}$	1
5)	> 1	$\operatorname{coth} \left(\frac{n}{2} \operatorname{ar} \operatorname{coth} K \right)$	1
6)	∞	∞	geen

1) $x(n)$ convergeert niet

2) $x(n) \equiv x(0)$. Dit geval treedt op voor $b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 0$.

3) $x(n)$ convergeert

4) $x(n) \equiv \frac{A+C}{B+C} x(0)$ voor $n > 0$. Dit geval treedt op als $c_1 = 0, c_2 = 0$ of $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$.

5) $x(n)$ convergeert

6) $x(n) \equiv \frac{A}{B} x(0)$.

De convergentievoorwaarde luidt dus

$$K^2 \geq 0 \quad (5,1)$$

Hieraan is in elk geval voldaan als alle $a_{ij}, b_i, c_i > 0$ zijn ¹⁾.

In de notatie van 2. geldt

$$K = \frac{SR}{S^2 P - VWD} \quad (5,2)$$

zodat de voorwaarden (2,5) en (5,1) dezelfde zijn!

Uit (5,2) volgt ook, dat het proces naar die oplossing (2,4) convergeert, waarvoor R het teken van $\frac{S}{S^2 P - VWD}$ heeft, (want $K \geq 0$).

De andere oplossing, $\lim_{n \rightarrow -\infty} x(n)$ is instabiel en zou gevonden worden door het proces (3,1 - 3,2) achterstevoren uit te voeren.

Over de aard van de convergentie kan nog het volgende opgemerkt worden:

Voor $k n \gg 1$ is $N = \operatorname{th} kn = 1 - 2e^{-2kn}$. In (4,5) gesubstitueerd leidt dit tot

$$\frac{x(n+2) - x(n)}{x(n) - x(n-2)} = \frac{1-K}{1+K} \quad (5,3)$$

¹⁾ Cf. W. Peremans, Over de oplossing van een stelsel bilineaire vergelijkingen, Rapport Z.W. 1952-015.

6. Ter illustratie van het bovenstaande moge hier een uitgewerkt voorbeeld voor het geval $0 < K^2 < 1$ volgen.

$$\begin{array}{ll} \text{In } (2,1) \text{ zij} & a_{11} = 2 \qquad b_1 = 18 \\ & a_{12} = 3 \qquad b_2 = 22 \\ & a_{21} = 1 \qquad c_1 = 12 \\ & a_{22} = 2 \qquad c_2 = 28 \end{array}$$

Met deze coëfficiënten is $R^2 = 19044 > 0$

$$K = 0.99137931.$$

Volgens (2.4) heeft dit stelsel de volgende oplossingen, waarvan de eerste de stabiele blijkt te zijn:

	x	y	z
1)	2	$\frac{4}{3}$	3
2)	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{7}{12}$	72

De iteratie begint met de schatting $p_1(0) = 6.00$, $p_2(0) = -10.99$, welke dicht bij de instabiele oplossing ligt. Hiervan uitgaande wordt in 12 stappen de eerste oplossing in 8 decimalen nauwkeurig verkregen.

De coëfficiënten A, B en C in (4.5) worden:

$$A = -2786.6434 \qquad C = 2784.0000$$

$$B = -2781.5791.$$

In (5.3) wordt $\frac{1-K}{1+K} = 0.004329$ (De afwijkende waarde voor $n = 10$ is een gevolg van de afronding).

In de kolommen 2, 3, 4, 5 is het iteratieproces (1,2) uitgevoerd, terwijl 6, 7 en 8 het verloop van $x(n)$ bij dit proces aangeven. In 9 en 10 is $x(n)$ berekend volgens (4.5).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	$p_1(n)$	$p_2(n)$	$q_1(n)$	$q_2(n)$	$x(n)$	$\frac{x(n+2)-x(n)}{x(n)}$	$\frac{x(n+2)-x(n)}{x(n)-x(n-2)}$	$N=\text{th}2k \cdot \frac{n}{2}$	$x(n)$
$-\infty$									
0	6.00	- 10.99			-1.83166667			-1	-1.83333333=- $\frac{11}{6}$
1			11.88	- 7.035				0	-1.8317
2	6.78	- 10.046			-1.48171091				
3			3.415	112.90					
4	$(10^{-2}x)5.209$	9.598			1.84258015	0.15670933		0.99137931	-1.4833
5			0.59952038	0.80406628					1.8417
6	4.98443803	9.96533450			1.99928948	0.00070744	0.00451435	0.99999984	1.9993
7			0.60198020	0.80266063					
8	4.98346833	9.96692133			1.99999692	0.00000307	0.00433959	1.00000000	2.0000
9			0.60199084	0.80265455					
10	4.98346413	9.96692819			1.99999999	0.00000001 (0.00325733)	1.00000000	1.00000000	2.0000
11			0.60199089	0.80265452					
12	4.98346412	9.96692824			2.00000000			1.00000000	2.0000
13			0.60199089	0.80265452					
∞								1	2.0000

7. Opmerking over de convergentie in het algemene geval.

Uit (1,2a) en (1,2b) volgt:

$$p_i(n+2) = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^m \frac{a_{ij} c_j}{\sum_{l=1}^m a_{lj} p_l(n)}} \quad (i = 1 \dots m) \quad (7.1)$$

Voer weer in de verhoudingen

$$x_i(n) = \frac{p_i(n)}{p_m(n)} = \frac{p_i(n)}{p_{r+1}(n)} \quad (i = 1 \dots m-1 = r) \quad (7.2)$$

waardoor (7.1) overgaat in

$$x_i(n+2) = \frac{T_i(n)}{N_i(n)} = \frac{\sum_{(v)} t_{n_1 n_2 \dots n_r}^{(i)} x_1^{n_1}(n) x_2^{n_2}(n) \dots x_r^{n_r}(n)}{\sum_{(v)} n_{n_1 n_2 \dots n_r}^{(i)} x_1^{n_1}(n) x_2^{n_2}(n) \dots x_r^{n_r}(n)} \quad (7.3)$$

(i = 1 \dots r)

Hierin betekent $\sum_{(v)}$ de som over die variaties van $n_1, n_2, \dots, n_r$, waarbij $n_j = 0, 1, 2, \dots$ en $\sum_{j=1}^r n_j \leq r$.

$T_i(n)$ en $N_i(n)$ zijn dus polynomen van de graad r in de r functies $x_j(n)$. De coëfficiënten $t_{n_1 \dots n_r}^{(i)}$ en $n_{n_1 \dots n_r}^{(i)}$ hangen van de coëfficiënten van (1,1) af.

Veronderstel nu, dat de door (7,3) bepaalde rij $x_i(n)$ convergeert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i(n) = x_i \quad (i = 1 \dots r)$$

Met

$$T_i = \lim_{n \rightarrow \infty} T_i(n) \text{ en } N_i = \lim_{n \rightarrow \infty} N_i(n)$$

is dan $x_i = \frac{T_i}{N_i}$.

Bij invoering van $\varepsilon_i(n) = x_i - x_i(n)$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_i(n) = 0$; zij n reeds zo groot, dat $\varepsilon_i(n) \ll x_i$.

Met (7,3) is nu equivalent:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(n+2) &= \frac{T_i}{N_i} - \frac{T_i(n)}{N_i(n)} = \\ &= \frac{T_i}{N_i} - \frac{T_i - \sum_{(v)} t_{n_1 n_2 \dots n_r}^{(i)} \sum_{j=1}^r n_j x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_j^{n_j-1} \dots x_r^{n_r} \varepsilon_j(n)}{N_i - \sum_{(v)} n_{n_1 n_2 \dots n_r}^{(i)} \sum_{j=1}^r n_j x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_j^{n_j-1} \dots x_r^{n_r} \varepsilon_j(n)} \end{aligned}$$

ofwel

$$\varepsilon_i(n+2) = \sum_{j=1}^r A_{ij} \varepsilon_j(n) \quad (i = 1 \dots r) \quad (7.4)$$

waarin de A_{ij} van n onafhankelijke constanten zijn, bepaald door de $t_{n_1 \dots n_r}^{(1)}$, $n_{n_1 \dots n_r}^{(1)}$, en door de oplossing x_j ($j = 1 \dots r$).

De oplossing van de differentievergelijking (7,4) kan als volgt uitgedrukt worden:

Zij A de matrix (A_{ij}) , I de eenheidsmatrix van orde r en α een kolommatrix van r onbekenden α_j dan heeft het stelsel vergelijkingen

$$(A - \lambda I) \alpha = 0 \quad (7,5)$$

slechts voor die waarden van λ een oplossing, waarvoor

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0. \quad (7,6)$$

Stel de uit (7,7) gevonden eigenwaarden λ_1 van A nu alle verschillend, dan vindt men r stelsels oplossingen $\alpha^{(1)}$ van (7,5), die dus voldoen aan

$$(A - \lambda_1 I) \alpha^{(1)} = 0. \quad (1 = 1 \dots r)$$

of

$$\sum_{j=1}^r A_{ij} \alpha_j^{(1)} = \lambda_1 \alpha_i^{(1)} \quad \begin{matrix} (i = 1 \dots r) \\ (1 = 1 \dots r) \end{matrix} \quad (7,7)$$

Is verder $k_1 = -\frac{1}{2} \log \lambda_1$, dan is de oplossing van (7,4) te schrijven als

$$\xi_j(n) = \sum_{l=1}^r \alpha_j^{(l)} e^{-k_l n} \quad (j = 1 \dots r) \quad (7,8)$$

Tenslotte, als $\beta_j^{(1)}$ de elementen zijn van de inverse van de matrix $\alpha_j^{(1)}$ (in beide is j de rijen-index), dan geldt:

$$\sum_{l=1}^r \beta_j^{(l)} \xi_l(n+2) = \lambda_j \sum_{l=1}^r \beta_j^{(l)} \xi_l(n) \quad (j=1 \dots r) \quad (7,9)$$

Er zijn dus r lineaire combinaties van $\xi_j(n)$, welke lineair convergeren. Noodzakelijke voorwaarde is, dat $|\lambda_1| < 1$. Voor $m = 2$ vindt men de formule (5,3) weer terug.